§ Bases de kets e Representações Matriciais

Reservamos os símbolos $(A, B, C, \dots)$ para operadores que representam observáveis físicos, e $(X, Y, Z, \dots)$ para operadores arbitrários.

Teorema. Os autovalores de um operador Hermiteano A são reais; os correspondentes autokets de A relativos à autovalores diferentes, são ortogonais.

Dem. Seja $(a', a'', \dots)$ autovalores de A:

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad , \quad A|a''\rangle = a''|a''\rangle, \dots$$

$$A|a''\rangle = a''|a''\rangle \overset{DC}{\longleftrightarrow} \langle a''|A^{\dagger} = \langle a''|A = (a'')^{*}\langle a''|$$

Assim

$$\langle a''|A|a'\rangle = \langle a''|\left(A|a'\rangle\right) = a'\langle a''|a'\rangle$$

$$= \left(\langle a''|A\right)|a'\rangle = (a'')^{*}\langle a''|a'\rangle ,$$

logo $\quad (a' - (a'')^{*})\langle a''|a'\rangle = 0 \quad .$

Tomando $\quad a'' = a' \ , \ \langle a'|a'\rangle > 0 \Rightarrow a'^{*} = a'$,

e portanto os autovalores são reais. Escrevemos a relação acima como:

$$0 = (a' - a'')\langle a''|a'\rangle \,,$$

e se $a'' \neq a' \Rightarrow \langle a''|a'\rangle = 0$ (ortogonalidade).

Pergunta: Que acontece no caso de degenerescência do espectro? Seja o caso que dois auto-kets l.i. correspondem a um mesmo autovalor

$$A|a_1'\rangle = a'|a_1'\rangle$$
$$A|a_2'\rangle = a'|a_2'\rangle$$

O teorema acima nada fala sobre a ortogonalidade neste caso. Em princípio podemos ter

$$\langle a_1'|a_2'\rangle \neq 0$$

Estes kets sempre podem ser ortogonalizados. De fato, definimos novos kets como:

$$|b_1\rangle \equiv |a_1'\rangle$$

$$|b_2\rangle \equiv |a_2'\rangle - \frac{\langle a_1'|a_2'\rangle\, |a_1'\rangle}{\langle a_1'|a_1'\rangle}$$

Estes novos kets são ortogonais:

$$\langle b_1|b_2\rangle = \langle a_1'|a_2'\rangle - \frac{\langle a_1'|a_2'\rangle\langle a_1'|a_1'\rangle}{\langle a_1'|a_1'\rangle} = 0$$

Eles também são auto-kets de A com autovalor a'.
Em efeito:

$$A|b_1\rangle = A|a_1'\rangle = a'|a_1'\rangle = a'|b_1\rangle$$

$$\begin{aligned} A|b_2\rangle &= A|a_2'\rangle - \frac{\langle a_1'|a_2'\rangle}{\langle a_1'|a_1'\rangle} A|a_1'\rangle \\ &= a'\left(|a_2'\rangle - \frac{\langle a_1'|a_2'\rangle}{\langle a_1'|a_1'\rangle}|a_1'\rangle\right) \\ &= a'|b_2\rangle \end{aligned}$$

Este processo pode ser generalizado para um número arbitrário de auto-kets <u>degenerados</u> (processo de ortogonalização de Schmidt). Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar que todos os auto-kets do operador A são ortogonais. Todos eles podem também serem normalizados. Por convenção, consideramos sempre (a não ser que se fale o contrário) conjuntos de autokets <u>ortonormais</u>

$$\langle a''|a'\rangle = \delta_{a''a'}$$

<u>Postulado:</u> O conjunto $\{|a'\rangle\}$ é um conjunto completo. Isto é, o espaço gerado por $\{|a'\rangle\}$ é o espaço de Hilbert completo, ou em outras palavras, o conjunto $\{|a'\rangle\}$ é uma <u>base</u> do espaço.

Portanto, um ket arbitrário $|\alpha\rangle$ pode ser desenvolvido como combinação linear da base $\{|a'\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} c_{a'} |a'\rangle .$$

Calcular os coeficientes $c_{a'}$:

$$\langle a''|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} c_{a'} \underbrace{\langle a''|a'\rangle}_{\delta_{a''a'}} = c_{a''} .$$ Assim:

$$|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} \langle a'|\alpha\rangle |a'\rangle = \sum_{\{a'\}} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

Pelo postulado de associatividade, temos:

$$\underbrace{|a'\rangle}_{\text{ket}}\big(\underbrace{\langle a'|\alpha\rangle}_{\text{número}}\big) = \big(\underbrace{|a'\rangle\langle a'|}_{\text{operador}}\big) \underbrace{|\alpha\rangle}_{\text{ket}} = (\text{ket})$$

ou

$$|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} |a'\rangle \cdot \langle a'|\alpha\rangle$$
$$= \Big(\sum_{\{a'\}} |a'\rangle\langle a'|\Big) |\alpha\rangle ,$$

e como o ket $|\alpha\rangle$ é arbitrário, obtemos a relação:

$$\boxed{\sum_{\{a'\}} |a'\rangle\langle a'| = 1}$$ (operador identidade)

Esta é uma relação de <u>Completeza</u> ou de <u>clausura</u>.

Aqui, a notação de Dirac mostra-se extremadamente conveniente. Por exemplo,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha|\Big(\sum_{\{a'\}} |a'\rangle\langle a'|\Big)|\alpha\rangle$$

$$= \sum_{\{a'\}} \langle\alpha|a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} \langle a'|\alpha\rangle^* \langle a'|\alpha\rangle$$

$$= \sum_{\{a'\}} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{\{a'\}} |c_{a'}|^2$$

Se o estado $|\alpha\rangle$ estiver normalizado, temos:

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{\{a'\}} |c_{a'}|^2$$

§ Operadores de Projeção

Analisar o produto externo $|a'\rangle\langle a'|$

$$\big(|a'\rangle\langle a'|\big)|\alpha\rangle = |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle = c_{a'}|a'\rangle$$

Lembrar que $|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} c_{a'} |a'\rangle$, de maneira que $(|a'\rangle\langle a'|)|\alpha\rangle$ seleciona de $|\alpha\rangle$ a componente paralela à $|a'\rangle$. Este é um <u>operador de projeção</u>:

$$\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle\langle a'|$$

i) $\Lambda_{a'}^2 = |a'\rangle\underbrace{\langle a'|a'\rangle}_{1}\langle a'| = |a'\rangle\langle a'| = \Lambda_{a'}$

ii) $\sum_{\{a'\}} \Lambda_{a'} = \sum_{\{a'\}} |a'\rangle\langle a'| = 1$

iii) $\Lambda_{a'}\Lambda_{a''} = |a'\rangle\underbrace{\langle a'|a''\rangle}_{0}\langle a''| = 0$, para $a' \neq a''$

Estas acima, são as propriedades básicas de um operador de projeção.

§ Representações Matriciais

Escolhida uma base, os operadores podem ser representados por matrizes. Consideremos um operador arbitrário X, e uma base $\{|a'\rangle\}$ de auto-kets de um observável A. Temos a identidade:

$$X = \sum_{\{a'\}} \sum_{\{a''\}} |a''\rangle\langle a''|X|a'\rangle\langle a'|$$

ou

$$= \sum_{\{a'\}} \sum_{\{a''\}} \underbrace{|a''\rangle\langle a'|}_{\text{operador}} \cdot \Big(\underbrace{\langle a''|X|a'\rangle}_{\text{número - c}} \Big)$$

Temos exatamente N^2 números $\langle a''|X|a'\rangle$, onde N é a dimensão do espaço. Estes N^2 números podem ser arranjados em uma matriz quadrada $(N \times N)$ com a convenção:

$$\langle \underset{\text{linha}}{a''} | X | \underset{\text{coluna}}{a'} \rangle$$

$\langle a''|X|a'\rangle$ são chamados "elementos de matriz". Obtemos desta forma uma representação matricial do operador X, referida à base $\{|a'\rangle\}$.
Esta, por sua vez é representada como a base natural do espaço:

$$|a^{(1)}\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a^{(2)}\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \; |a^{(N)}\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e

$$X \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(1)}|X|a^{(2)}\rangle & \cdots & \langle a^{(1)}|X|a^{(N)}\rangle \\ \langle a^{(2)}|X|a^{(1)}\rangle & \langle a^{(2)}|X|a^{(2)}\rangle & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \langle a^{(N)}|X|a^{(1)}\rangle & \cdots & \cdots & \langle a^{(N)}|X|a^{(N)}\rangle \end{pmatrix}$$

Temos a propriedade:

$$\langle a''|X|a'\rangle = \langle a'|X^\dagger|a''\rangle^*,$$

assim a matriz de $X^\dagger$ é obtida como a <u>transposta complexa conjugada</u> de X.

Para um operador Hermiteano B, temos:

$$\langle a''|B|a'\rangle = \langle a'|B|a''\rangle^{*} ,$$

portanto os elementos diagonais são reais, e os fora da diagonal são simétricos com conjugação.

Para o produto $Z = XY$ obtemos a regra usual de multiplicação de matrizes:

$$\langle a''|Z|a'\rangle = \langle a''|XY|a'\rangle$$

$$= \sum_{\{a'''\}} \langle a''|X|a'''\rangle\langle a'''|Y|a'\rangle .$$

Estudamos agora a relação:

$$|\gamma\rangle = X|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} |a'\rangle\langle a'|\gamma\rangle$$

Os coeficientes da expansão são

$$\langle a'|\gamma\rangle = \langle a'|X|\alpha\rangle = \sum_{\{a''\}} \langle a'|X|a''\rangle\langle a''|\alpha\rangle$$

Como representamos um ket?

$$|\gamma\rangle = \sum_{\{a'\}} \langle a'|\gamma\rangle\, |a'\rangle \longrightarrow$$

$$\langle a^{(1)}|\gamma\rangle|a^{(1)}\rangle + \langle a^{(2)}|\gamma\rangle|a^{(2)}\rangle + \cdots + \langle a^{(N)}|\gamma\rangle\,|a^{(N)}\rangle$$

$$\doteq \langle a^{(1)}|\gamma\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \langle a^{(2)}|\gamma\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \langle a^{(N)}|\gamma\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ou

$$|\gamma\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\gamma\rangle \\ \langle a^{(2)}|\gamma\rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(N)}|\gamma\rangle \end{pmatrix}$$

Matriz coluna, onde os elementos de matriz são os coeficientes de $|\gamma\rangle$ em relação à base $\{|a'\rangle\}$.

Assim temos:

$$|\gamma\rangle = X|\alpha\rangle \doteq$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\gamma\rangle \\ \langle a^{(2)}|\gamma\rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(N)}|\gamma\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|X|a^{(1)}\rangle & \cdots & \langle a^{(1)}|X|a^{(N)}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a^{(N)}|X|a^{(1)}\rangle & \cdots & \langle a^{(N)}|X|a^{(N)}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\alpha\rangle \\ \langle a^{(2)}|\alpha\rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(N)}|\alpha\rangle \end{pmatrix}$$

A base dual $\{\langle a'|\}$ é representada de maneira natural por matrizes linhas, da forma:

$$\langle a^{(1)}| \doteq (1\,0\,0 \cdots 0), \quad \langle a^{(2)}| \doteq (0\,1\,0 \cdots 0),$$

$$\cdots \langle a^{(N)}| \doteq (0\,0 \cdots 0\,1).$$

Um bra arbitrário é representado também por uma matriz linha

$$\langle \gamma| = \sum_{\{a'\}} \langle \gamma | a' \rangle \langle a'| = \sum_{\{a'\}} \langle a' | \gamma \rangle^* \langle a'|$$

$$= \langle \gamma | a^{(1)} \rangle \langle a^{(1)}| + \langle \gamma | a^{(2)} \rangle \langle a^{(2)}| + \cdots$$

$$= \langle a^{(1)} | \gamma \rangle^* \langle a^{(1)}| + \langle a^{(2)} | \gamma \rangle^* \langle a^{(2)}| + \cdots$$

$$\doteq \langle a^{(1)} | \gamma \rangle^* (1\,0\,0 \cdots) + \langle a^{(2)} | \gamma \rangle^* (0\,1\,0 \cdots 0) + \cdots$$

$$= \left(\langle a^{(1)} | \gamma \rangle^*, \langle a^{(2)} | \gamma \rangle^*, \ldots, \langle a^{(N)} | \gamma \rangle^* \right)$$

Productos internos:

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_{\{a'\}} \langle \beta | a' \rangle \langle a' | \alpha \rangle \doteq$$

$$\doteq \left(\langle a^{(1)} | \beta \rangle^*, \langle a^{(2)} | \beta \rangle^*, \ldots \langle a^{(N)} | \beta \rangle^* \right) \cdot \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | \alpha \rangle \\ \langle a^{(2)} | \alpha \rangle \\ \vdots \\ \langle a^{(N)} | \alpha \rangle \end{pmatrix}$$

$$= (\text{número } c)$$

Produtos externos:

$$|\beta\rangle\langle\alpha| = \sum_{\{a',a''\}} |a''\rangle\langle a''|\beta\rangle\langle\alpha|a'\rangle\langle a'|$$

$$= \sum_{\{a',a''\}} |a''\rangle\langle a'| \; \langle a''|\beta\rangle\langle a'|\alpha\rangle^{*} \quad \doteq$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^{*}, & \langle a^{(1)}|\beta\rangle\langle a^{(2)}|\alpha\rangle^{*} & \cdots \\ \langle a^{(2)}|\beta\rangle\langle a^{(1)}|\alpha\rangle^{*}, & \cdots & \\ & & \end{pmatrix}$$

Finalmente, representemos o próprio operador A na sua base de auto-kets:

$$A = \sum_{a''}\sum_{a'} |a''\rangle\langle a''|A|a'\rangle\langle a'|$$

$$= \sum_{a',a''} |a''\rangle\, a'\, \underbrace{\langle a''|a'\rangle}_{\delta_{a'a''}}\langle a'|$$

$$= \sum_{a'} a'\,|a'\rangle\langle a'| = \sum_{a'} a'\,\Lambda_{a'}$$

O operador é diagonal nesta representação, com seus autovalores na diagonal:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a^{(N)} \end{pmatrix}$$

Vejamos agora a relação

$$\langle \gamma | = \langle \alpha | X$$

$$\langle \gamma | a' \rangle = \langle \alpha | X | a' \rangle = \sum_{a''} \langle \alpha | a'' \rangle \langle a'' | X | a' \rangle$$

$$= \sum_{a''} \langle a'' | \alpha \rangle^* \langle a'' | X | a' \rangle \doteq$$

$$\doteq \left(\langle a^{(1)} | \gamma \rangle^*, \langle a^{(2)} | \gamma \rangle^*, \ldots \langle a^{(N)} | \gamma \rangle^* \right) =$$

$$= \left(\langle a^{(1)} | \alpha \rangle^*, \langle a^{(2)} | \alpha \rangle^*, \ldots \right) \circ \begin{pmatrix} \langle a^{(1)} | X | a^{(1)} \rangle & \cdots & \langle a^{(1)} | X | a^{(N)} \rangle \\ \langle a^{(2)} | X | a^{(1)} \rangle & & \\ \vdots & & \\ \langle a^{(N)} | X | a^{(1)} \rangle & \cdots & \langle a^{(N)} | X | a^{(N)} \rangle \end{pmatrix}$$

Multiplicação:

$$(\text{——})^* = (\text{——})^* \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}$$

Exemplo: Spin 1/2

Usamos como kets da base $|S_z;\pm\rangle$, que abreviamos como $|\pm\rangle$. A completeza se expressa por

$$|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = 1$$

Autovalores: $S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$, $S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle$

Descomposição espectral de S_z:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right).$$

Considerar operadores não hermiteanos:

$$S_+ \equiv \hbar|+\rangle\langle-|, \quad S_- \equiv \hbar|-\rangle\langle+| = (S_+)^\dagger$$

$$S_+|+\rangle = \hbar\, |+\rangle\langle-|+\rangle = 0, \quad S_+|-\rangle = \hbar\, |+\rangle\langle-|-\rangle = \hbar|+\rangle$$

$$S_-|-\rangle = 0, \quad S_-|+\rangle = \hbar|-\rangle$$

São operadores escadas, sobem ou baixam o spin.
Representemos matricialmente os operadores.
Primeiro tomamos a base $|\pm\rangle$:

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |-\rangle \doteq \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Temos:

$$S_z \doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_+ \doteq \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S_- \doteq \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

§ Base de autokets $\{|a_i\rangle\}_{i=1,\dots,n}$ de um observável A

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \,, \quad a_i^* = a_i \,, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\dim \mathcal{V} = n$$

- Ortonormalidade (mesmo considerando degenerescência)

$$\boxed{\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}}$$

- Completeza:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} |a_i\rangle\langle a_i| = 1}$$

§ Bases Naturais

$$|a_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad |a_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle a_1| \doteq (1\ 0 \cdots 0), \quad \langle a_2| \doteq (0\ 1 \cdots 0), \quad \ldots,$$

$$\langle a_n| \doteq (0\ 0 \cdots 1)$$

§ Representação de 'bras' e 'kets' em relação à base

$$|a_1\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad |a_m\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle \underbrace{\langle a_i|\alpha\rangle}_{\alpha_i}, \quad \langle\alpha| = \sum \langle a_i| \underbrace{\langle a_i|\alpha\rangle^*}_{\alpha_i^*}$$

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \langle\alpha| \doteq (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_m^*)$$

$$\alpha_i \equiv \langle a_i|\alpha\rangle$$

§ Produtos:

- Produto escalar

$$\langle \alpha | \beta \rangle \doteq \left(\alpha_1^* \alpha_2^* \cdots \alpha_n^* \right) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \beta_i \in \mathbb{C}$$

$$\langle \alpha | : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$$

- Produto Externo

$$
n\left\{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right. \times \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1^* & \beta_2^* & \cdots & \beta_n^* \end{pmatrix}}_{n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1^* & \alpha_1\beta_2^* & \cdots & \alpha_1\beta_n^* \\ \alpha_2\beta_1^* & \alpha_2\beta_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_n\beta_1^* & & & \alpha_n\beta_n^* \end{pmatrix}}_{n} \left.\right\} n
$$

$$
|\alpha\rangle\langle\beta| = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j^* \; |a_i\rangle\langle a_j|
$$

§ Representação Matricial de Operadores:

$$X = \sum_{i,j} |a_i\rangle \underbrace{\langle a_i | X | a_j \rangle}_{X_{ij}} \langle a_j|$$

$$= \sum_{i,j} |a_i\rangle\langle a_j| \, X_{ij}$$

$$X \doteq \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & X_{nn} \\ X_{n1} & \cdots & & \end{pmatrix}$$

$$X_{ij} = \langle a_i | X | a_j \rangle$$

§ Multiplicação de Matrizes

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ \text{linha } i \rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
X_{11} & X_{12} & \cdots & & & X_{1n} \\
X_{21} & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \\
X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{im} & \cdots & X_{in} \\
\vdots & & & & & \\
X_{n1} & & \cdots & & & X_{nn}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & & & \text{coluna } j \downarrow & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1j} & \cdots & Y_{1n} \\
Y_{21} & & & Y_{2j} & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & Y_{mj} & & \\
 & & & \vdots & & \\
Y_{n1} & & \cdots & Y_{nj} & \cdots & Y_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$Z = X \cdot Y$$

$$Z_{ij} = \sum_{m=1}^{n} X_{im} \cdot Y_{mj}$$

§ Representação de um Observável na sua própria base

$$A \doteq \begin{pmatrix} a' & & & \\ & a'' & & \bigcirc \\ & & a''' & \\ & \bigcirc & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle,$$

$$A = \sum_{a'} a'|a'\rangle\langle a'| .$$

§ Ação de Operadores

$$|\beta\rangle = X|\alpha\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \gamma | = \langle \alpha | X$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^* & \gamma_2^* & \cdots & \gamma_n^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1^* & \alpha_2^* & \cdots & \alpha_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$